Universidad Simón Bolívar.
Departamento de Matemáticas
Puras y Aplicadas.

Primer Parcial - MA1112
Abril-Julio 2007
Soluciones Tipo 1

1. a) $t = \sqrt{2x-9} \implies t^2 = 2x - 9 \implies x = \dfrac{t^2+9}{2} \implies dx = t\,dt$ (1 punto)

$$\int \frac{dx}{x\sqrt{2x-9}} = \int \frac{t}{(\frac{t^2+9}{2})t}dt = 2\int \frac{dt}{t^2+9} = \frac{2}{3}\arctan\frac{t}{3} + C$$
$$= \frac{2}{3}\arctan\frac{\sqrt{2x-9}}{3} + C \quad \text{(2 puntos)}$$

entonces

$$\int_{9/2}^{9} \frac{dx}{x\sqrt{2x-9}} = \left[\frac{2}{3}\arctan\frac{\sqrt{2x-9}}{3}\right]_{9/2}^{9} \quad \text{(1 punto)}$$
$$= \frac{2}{3}(\arctan 1 - 0) = \frac{\pi}{4} \quad \text{(1 punto)}$$

b) Cambio: $u = \cos^2 2x \implies du = -2(\cos 2x)(\operatorname{sen} 2x)2dx = -(\operatorname{sen} 4x)dx$ (2 puntos)

$$\int \frac{\operatorname{sen} 4x}{\cos^4 2x + 4}dx = -\frac{1}{2}\int \frac{du}{u^2+2^2} = -\frac{1}{4}\arctan\frac{\cos^2 2x}{2} + C \quad \text{(3 puntos)}$$

2.

$$-1 \leq \cos x \leq 1; \quad \text{para } x \in [0, 2\pi]$$
$$-3 \leq 3\cos x \leq 3 \quad \text{(1 punto)}$$
$$7 \leq 10 + 3\cos x \leq 13 \quad \text{(1 punto)}$$
$$\frac{1}{13} \leq \frac{1}{10+3\cos x} \leq \frac{1}{7} \quad \text{(1 punto)}$$

Aplicando el teorema del acotamiento:

$$\frac{2\pi}{13} \leq \int_0^{2\pi} \frac{dx}{10+3\cos x} \leq \frac{2\pi}{7} \quad \text{(2 puntos)}$$

3. La pendiente de la recta tangente a la parábola $y = -x^2 + 4x - 3$ en el punto (x, y) es $y' = -2x+4$. Se obtienen las ecuaciones de las tangentes en los puntos $(0, -3)$ y $(3, 0)$:

$$
\begin{aligned}
4 = \frac{y+3}{x} &\implies y = 4x - 3 \quad \text{(tangente en } (0,-3)\text{) (1 punto).} \\
-2 = \frac{y}{x-3} &\implies y = -2x + 6 \quad \text{(tangente en } (3,0)\text{) (1 punto).}
\end{aligned}
$$

Para hallar la intersección de ambas rectas (1 punto):

$$4x - 3 = -2x + 6 \implies x = \frac{3}{2} \implies y = 3$$

y las raíces de la parábola son: $x = 1$ y $x = 3$ (1 punto).

(Bosquejar la región: 1 punto)

El área pedida está dada por la suma de integrales:

$$
\begin{aligned}
&\int_0^{3/2} \big((4x-3) - (-x^2+4x-3)\big)\,dx + \int_{3/2}^{3} \big((-2x+6) - (-x^2+4x-3)\big)\,dx \quad \text{(1 punto)} \\
&\qquad = \int_0^{3/2} x^2 dx + \int_{3/2}^{3} \big(x^2 - 6x + 9\big)\,dx = \left[\frac{x^3}{3}\right]_0^{3/2} + \left[\frac{x^3}{3} - 3x^2 + 9x\right]_{3/2}^{3} \quad \text{(1 punto)} \\
&\qquad = \frac{9}{4} \quad \text{(1 punto)}
\end{aligned}
$$

4. *a*)

$$\begin{aligned}
\Delta x &= \frac{a}{n} \\
\bar{x}_i &= i\Delta x = \frac{a}{n} i \quad \text{(1 punto)} \\
f(\bar{x}_i) &= \left(\frac{ai}{n}\right)^2 = \left(\frac{a^2}{n^2}\right) i^2 \quad \text{(1 punto)} \\
S_n = \sum_{i=0}^{n-1} f(\bar{x}_i)\Delta x &= \sum_{i=0}^{n-1} \frac{a^3}{n^3} i^2 = \frac{a^3}{n^3} \sum_{i=0}^{n-1} i^2 \quad \text{(2 puntos)} \\
&= \frac{a^3(n-1)n(2n-1)}{6n^3} \quad \text{(1 punto)}
\end{aligned}$$

b)

$$S = \lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty} \frac{a^3(n-1)n(2n-1)}{6n^3} = \frac{a^3}{6} \quad \text{(2 puntos)}$$